WISKUNDE 3
Natuurkunde en Sterrenkunde
Tentamen
Woensdag 24 juni 1998, 09.00-12.00 uur, ZG 15
Open boek

Het tentamen zal op 29 juni nagekeken zijn. Voor elke opgave is maximaal 1 punt te behalen. Gelieve uw tentamenbriefje **helemaal** in te vullen, met uitzondering van alleen het cijfer en de handtekening.

Som 1:

Beschouw twee in-producten van $\mathbb{R}^n$; $< \cdot, \cdot >_1$ en $< \cdot, \cdot >_2$. Stel $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire transformatie. Stel dat L Hermitisch is met betrekking tot het eerste in-product, $< \cdot, \cdot >_1$. Is het dan ook noodzakelijk Hermitisch met betrekking tot het tweede in-product?
Verklaar uw antwoord (d.w.z. bewijs of geef een tegenvoorbeeld).
Hint: Staan 2 vectoren die loodrecht staan m.b.t. tot $< \cdot, \cdot >_1$ ook loodrecht met betrekking tot $< \cdot, \cdot >_2$?

Som 2:

Beschouw de reële symmetrische 3×3 matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Stel dat deze matrix unitair is. Bewijs dat $| a_{k\ell} | \leq 1$ voor $1 \leq k, \ell \leq 3$.

Som 3:

Stel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ y^2 + \sin x \end{pmatrix}$$

en

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(x+y) \end{pmatrix}.$$

Stel $h = g \circ f$. Bereken $h'(\pi, 0)$.

Som 4:

Stel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$f(x,y,z) = (e^{y^2}, y \cos x, 1)$$

1. Bereken de Jacobiaan Df
2. Bereken $Df(0,0,0)$
3. Bewijs dat f differentieerbaar is ter plaatse (0,0,0)

Som 5:

Beschouw de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f,$$

met $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 2 maal continu differentieerbaar. Bereken de oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarden

$$\begin{aligned} f(0,x) &= x+2 && (1) \\ \frac{\partial}{\partial t} f(0,x) &= 1 && (2) \end{aligned}$$

Som 6:

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$f(x,y,z) = x^2 + 3xy + y^2 + z^2 + 32x^4y^5 \sin(e^z).$$

Is (0,0,0)

- een stationair punt?
- een lokaal maximum?
- een lokaal minimum?
- een zadel?

Verklaar uw antwoord.

Som 7:

Minimaliseer

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

gegeven door

$$f(x,y,z) = x + y^2 + z$$

onder de nevenvoorwaarde

$$x^2 + z^2 = 6$$

Wat is de waarde van het minimum?
Verklaar.

Som 8:

Stel dat S een bol is in $\mathbb{R}^3$. Beschouw $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, en

veronderstel dat f_1 en f_2 continu differentieerbaar zijn.

Stel verder dat $f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z)$ voor alle $(x, y, z) \in S$.

Bewijs dat , waarbij $\operatorname{div} f := \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$.

Som 9:

We hebben geleerd hoe

$$\iint_Q f,$$

met $Q \subset \mathbb{R}^2$ een rechthoek, gedefinieerd is.

Hoe zou u willen definiëren? U mag veronderstellen dat $f \geq 0$ en continu is.

Som 10:

Krijgt u gratis voor papier, moeite en het correct invullen van het tentamenbriefje.
